



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Mild Slope Ligningen

for Regelmæssige Bølger

Brorsen, Michael

Publication date:
1997

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Brorsen, M. (1997). *Mild Slope Ligningen: for Regelmæssige Bølger*. Institut for Vand, Jord og Miljøteknik, Aalborg Universitet.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Mild Slope ligningen

for regelmæssige bølger

Michael Brorsen

Marts 1997

Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik

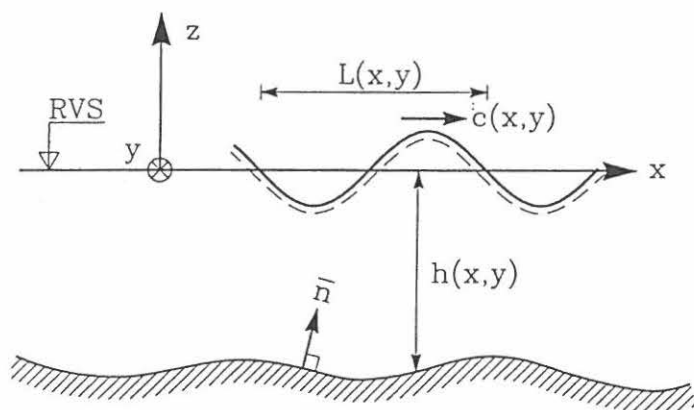
Aalborg Universitet

Sohngårdsholmsvej 57

9000 Aalborg

Indholdsfortegnelse

1	Mild Slope ligningen for regelmæssige bølger	1
1.1	Konstant vanddybde	5
1.2	Svagt varierende vanddybde	12
1.3	Maksimale bundhældninger	20
1.4	Anvendelsesområder	21
2	Litteratur	22



Figur 1: Definitionsskitse

1 Mild Slope ligningen for regelmæssige bølger

I det følgende gives en beskrivelse af forudsætningerne for Mild Slope ligningen, som kort fortalt kan benyttes til at beregne harmoniske, lineære bølger i områder med "små" gradienter på dybderne.

Ligningen stiller derimod ingen krav til områdets geometri i planen og der forudsættes heller ikke bølger med rette fronter. Ligningen gælder selvfølgelig for specialtilfældet med rette bølgefronter, hvorfor begreber som bølgelængde, L , fasehastighed, c , og gruppehastighed, c_g , eksisterer, men de varierer i planen (x, y) . Følgende betegnelser anvendes:

Væsken antages ideal og strømmingen rotationsfri, således at sammenhængen mellem hastighed $\vec{v} = (u, v, w)$ og hastighedspotentiale φ er:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi \quad (1)$$

$$\text{hvor grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Indsættes (1) i kontinuitetsligningen

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (2)$$

findes umiddelbart

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0} \quad (3)$$

dvs. Laplaces ligning.

Randbetingelser opskrives i det generelle tilfælde først ved bunden og ved den frie overflade.

Ved den frie overflade kan den dynamiske randbetingelse, $p = 0$, efter linearisering af Bernoullis generaliserede ligning, skrives som

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{for } z = 0 \quad (4)$$

og den lineariserede kinematiske randbetingelse bliver

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{for } z = 0 \quad (5)$$

Differentieres ligning (4) mht. t og indsættes dernæst ligning (5) i ligning (4) findes:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0} \quad \text{for } z = 0 \quad (6)$$

Ved bunden haves

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{for } z = -h(x, y) \quad (7)$$

eller

$$\text{grad } \varphi \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{for } z = -h(x, y) \quad (8)$$

idet relationen $\partial(\)/\partial n = \text{grad}(\) \cdot \vec{n}/n$ er benyttet, og \vec{n} er normalen til bunden. Fra matematikken vides, at en flade i rummet kan beskrives med ligningen

$$G(x, y, z) = 0$$

Funktionen $G(x, y, z)$ er i dette tilfælde let at bestemme, idet $z + h(x, y) = 0$ på bundfladen, hvorfor

$$G(x, y, z) = z + h(x, y)$$

Da $\text{grad } G$ står vinkelret på de flader, hvor G er konstant, kan normalen til bunden derfor findes som $\text{grad } G$, eller

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right) \quad (9)$$

Herefter kan ligning (8) omskrives til

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0} \quad \text{for } z = -h(x, y) \quad (10)$$

Ved løsning af Laplaces ligning anvendes Separationsmetoden, dvs. vi benytter, at generelt kan hastighedspotentialet for harmoniske bølger skrives som

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= F^*(x, y, t) \cdot Z(z) \\ &= F(x, y) \cdot \sin(\omega t + \delta(x, y)) \cdot Z(z) \\ &= F(x, y) \cdot \cos \delta(x, y) \cdot \sin \omega t \cdot Z(z) \\ &\quad + F(x, y) \cdot \sin \delta(x, y) \cdot \cos \omega t \cdot Z(z) \\ &= F_1(x, y) \cdot \sin \omega t \cdot Z(z) + F_2(x, y) \cdot \cos \omega t \cdot Z(z) \end{aligned} \quad (11)$$

hvor

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ \sin(a + b) &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \\ F_1 &= F \cdot \cos \delta \\ F_2 &= F \cdot \sin \delta \end{aligned}$$

I et givet punkt (x, y, z) kan hastighedspotentialet derfor beskrives som en harmonisk funktion med amplitude $F(x, y) \cdot Z(z)$ og fasevinkel $\delta(x, y)$.

Bestemmelse af potentialet i en vertikal kræver således bestemmelse af 2 størrelser der afhænger af x og y , nemlig $F(x, y)$ og $\delta(x, y)$ eller $F_1(x, y)$ og $F_2(x, y)$, samt af $Z(z)$.

Overfladeelevationen beregnes af ligning (4), og principielt kan man skrive

$$\eta(x, y, t) = a(x, y) \cdot \sin(\omega t + \delta_\eta(x, y)) \quad (12)$$

hvor $a(x, y)$ er amplituden i et punkt og $\delta_\eta(x, y)$ er elevationens fasevinkel. Som vist ovenfor kan (12) omskrives til

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= a(x, y) \cdot \cos \delta_\eta(x, y) \cdot \sin \omega t + a(x, y) \cdot \sin \delta_\eta(x, y) \cdot \cos \omega t \\ &= a_1(x, y) \cdot \sin \omega t + a_2(x, y) \cdot \cos \omega t \end{aligned} \quad (13)$$

Overfladeelevationen kan således findes, når enten $a(x, y)$ og $\delta_\eta(x, y)$ eller $a_1(x, y)$ og $a_2(x, y)$ er beregnet.

1.1 Konstant vanddybde

Først betragtes løsning af Laplaces ligning ved konstant vanddybde og resultaterne herfra generaliseres til variabel vanddybde.

Udtrykket for hastighedspotentialet

$$\varphi = F^*(x, y, t) \cdot Z(z) \quad (14)$$

indsættes i (3), der også kan skrives som

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad \text{hvor } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Dette giver

$$\nabla^2 F^* \cdot Z + Z'' \cdot F^* = 0$$

og efter division med $F^* \cdot Z$ gives

$$-\frac{\nabla^2 F^*}{F^*} = \frac{Z''}{Z} = \lambda^2 \quad (15)$$

hvor λ må være en konstant.

Dette giver

$$Z''(z) - \lambda^2 Z(z) = 0 \quad (16)$$

og

$$\nabla^2 F^* + \lambda^2 F^* = 0 \quad (17)$$

Periodisk variation af Z med z må forkastes, da alle bevægelser skabt af bølger aftager nedefter. Dette kræver $\lambda^2 > 0$ og dermed

$$Z(z) = B_1 e^{\lambda z} + C_1 e^{-\lambda z} = B \cosh \lambda z + C \sinh \lambda z$$

hvor B_1 , C_1 , B og C er konstanter.

Udnyttes RB ved bunden, dvs. $Z'(-h) = 0$ ved konstant dybde, findes som tilfældet var ved bølger med rette fronter, at

$$\begin{aligned} Z(z) &= C \frac{\cosh \lambda(z+h)}{\sinh \lambda h} \\ &= \frac{C}{\tanh \lambda h} \frac{\cosh \lambda(z+h)}{\cosh \lambda h} \\ &= C_2(x, y) \frac{\cosh \lambda(z+h)}{\cosh \lambda h} \end{aligned}$$

hvor $C_2 = C / \tanh \lambda h = C_2(x, y)$, idet både λ og h afhænger af x og y .

Herefter kan potentialet skrives som

$$\varphi = \frac{\cosh \lambda(z+h)}{\cosh \lambda h} C_2(x, y) \cdot F(x, y) \sin(\omega t + \delta(x, y)) \quad (18)$$

Da $F(x, y)$ endnu ikke er bestemt, kan man uden tab af information vælge $C_2(x, y) = 1$, og dermed udtrykke den lodrette variation af potentialet som

$$Z(z) = \frac{\cosh \lambda(z+h)}{\cosh \lambda h} \quad (19)$$

Dette udtryk for $Z(z)$ gælder for både rette og krumme bølgefronter. Værdien af λ findes som vist nedenfor.

Indsættes ligning (11) i overfladebetingelsen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{for } z = 0$$

findes

$$F \cdot \lambda \frac{\sinh \lambda h}{\cosh \lambda h} \cdot \sin(\omega t + \delta) + \frac{1}{g} F \cdot \frac{\cosh \lambda h}{\cosh \lambda h} (-\omega^2) \sin(\omega t + \delta) = 0$$

og dermed

$$\omega^2 = g \lambda \tanh \lambda h \quad (20)$$

Konstanten λ kan findes af denne ligning, når $\omega = (2\pi)/T$ er givet.

Ligning (20) sammenlignes nu med den såkaldte dispersionsligning for sædvanlige 1. ordens bølger, dvs.

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (21)$$

hvor k er bølgetallet defineret som

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (22)$$

og L er bølgelængden for bølger med rette fronter.

For samme vanddybde og periode må de to ligninger have samme løsning, dvs.

$\lambda = k$

(23)

Den lodrette variation af potentialet afhænger derfor ikke af bølgefronternes krumning.

Efter fastlæggelsen af den lodrette variation af potentialet, kan variationen af potentialet i planen findes af ligning (17). Indsættes i denne ligning $\lambda = k$, findes

$\frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} + k^2 F^* = 0$

(24)

Ligning (24) er den såkaldte *Helmholz*-ligning. Der kræves her bestemmelse af 2 ubekendte størrelser i alle punkter, idet

$$F^*(x, y, t) = F_1(x, y) \sin \omega t + F_2(x, y) \cos \omega t$$

Opskrives ligning (24) imidlertid til tidspunkterne $t = 0$ henholdsvis $t = T/4$ findes følgende to *Helmholz*-ligninger

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + k^2 F_2 = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + k^2 F_1 = 0 \quad (26)$$

hvoraf F_1 og F_2 kan bestemmes, når randbetingelser er angivet.

Det skal bemærkes, at der kun eksisterer ganske få analytiske løsninger. Et af de kendteste er *Sommerfelds* løsning i tilfælde af én uendelig lang, ret mole, hvor de indkommende bølger har rette fronter.

På figur 2 er vist elevationer, beregnet efter Sommerfeld's løsning. Molen er absorberende og parallel med de indkommende fronter. Bølgerne ses at kunne 'løbe om hjørner', og dette fænomen betegnes *diffraction*. Bølgehøjden bag molen er reduceret, hvilket beskrives med den såkaldte *diffraktions-koefficient*. Denne defineres som

$$\boxed{K_d = \frac{H}{H_i}} \quad (27)$$

hvor H er den lokale bølgehøjde, og H_i er bølgehøjden af de indkommende bølger.

På figur 3 er vist en placering af bølgefronterne samt *isodiffraktions*-kurverne. Disse er kurver, hvor K_d har konstant værdi. Bemærk, som tidligere nævnt, at de krumme fronters udbredelseshastighed afviger lidt fra de rette fronters hastighed, hvilket er tydeligst i området ved spidsen af molen.

Normalt må ligningerne (25) og (26) løses numerisk. Da Helmholtz-ligningen er en såkaldt elliptisk ligning, er det meget ressourcekrævende. I praksis benyttes derfor oftest andre formuleringer af problemet, som vist i det følgende.

Når $F^*(x, y, t)$ er fundet (dvs. F_1 og F_2 eller F og δ er beregnet), kan partikelhastigheder findes af

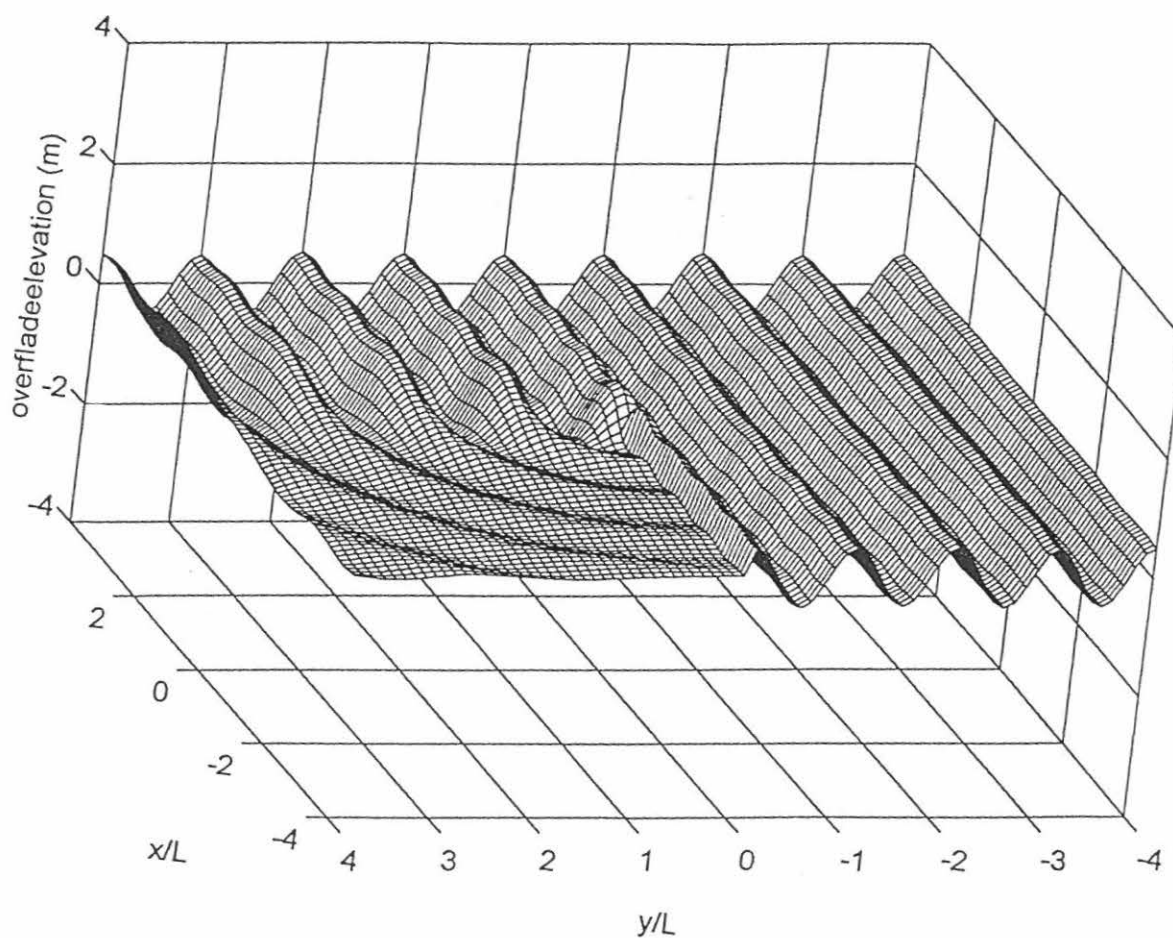
$$\vec{v} = \text{grad}\varphi$$

og elevationer findes ved at benytte den kinematiske RB ved overfladen, dvs.

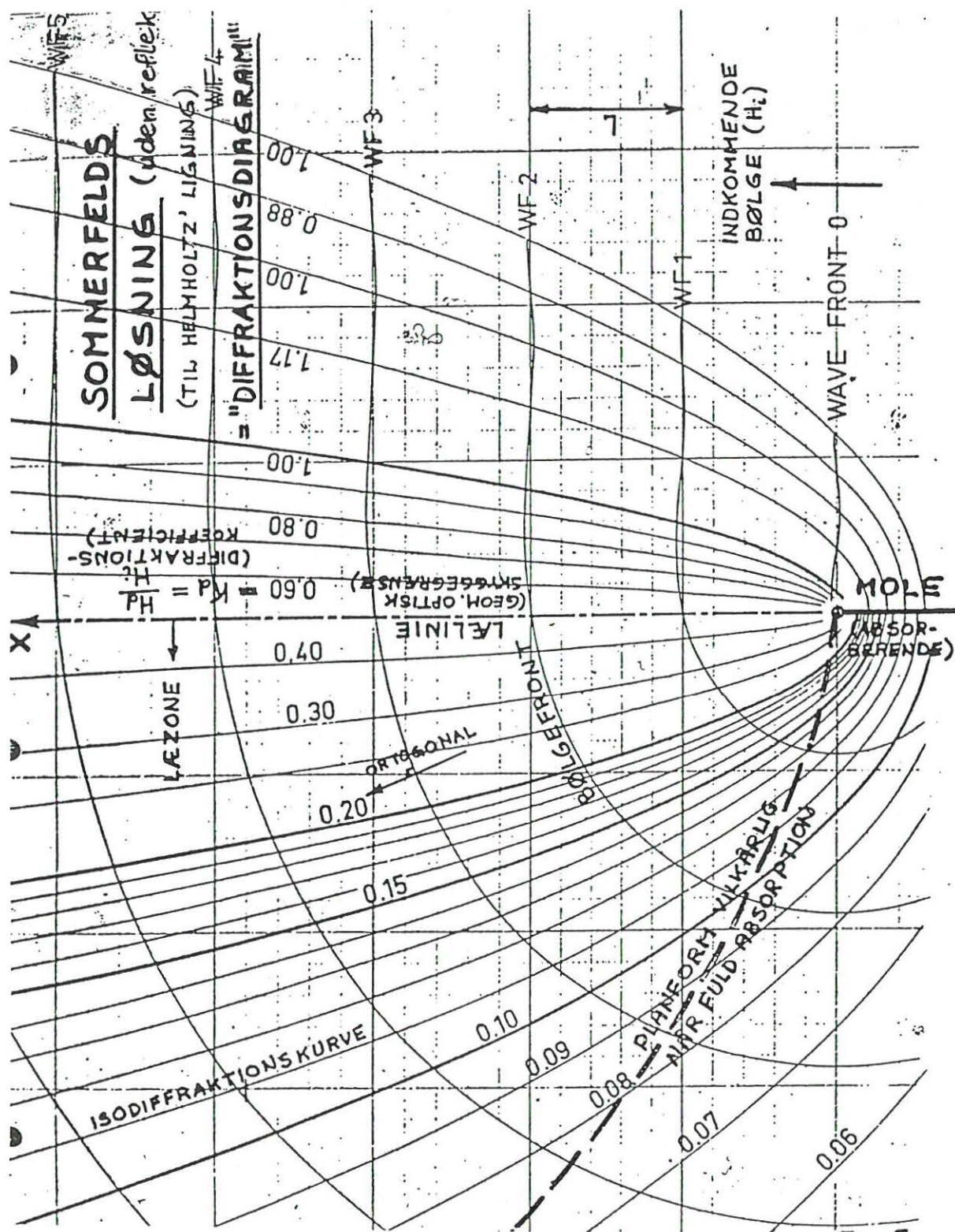
$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{for } z = 0$$

Indsættes her ligning (11) findes umiddelbart

$$\eta = -\frac{1}{g} F \frac{\cosh kh}{\cosh kh} \omega \cos(\omega t + \delta) \quad (28)$$



Figur 2: Elevationer ved en absorberende mole. Molen er parallel med de indkommende fronter.



Figur 3: Diffraaktionsdiagram. Absorberende mole

og dermed kan elevationen findes af

$$\eta = -\frac{F}{g} \omega \cos(\omega t + \delta) \quad (29)$$

Betegner p^+ afvigelsen fra hydrostatisk tryk og lineariseres Bernoullis generaliserede ligning, gives

$$p^+ = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (30)$$

Indsættes ligning (11) i denne ligning, findes

$$p^+ = -\rho F \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \omega \cos(\omega t + \delta)$$

Benyttes her ligning (29), findes endelig

$$p^+ = \rho g \eta \cdot \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (31)$$

dvs. samme relation, som man fandt ved bølger med rette fronter.

1.2 Svagt varierende vanddybde

Som en forhåbentlig god tilnærmelse antages, at i alle vertikaler kan potentialets variation med dybden findes af

$$Z(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (31)$$

Dette svarer til, at man lokalt antager konstant vanddybde. Da $h = h(x, y)$ og $k = k(x, y)$ (via dispersionsligningen (20), som ligeledes regnes gældende for svagt varierende vanddybde), indses, at Z indirekte afhænger af x og y .

Indsættes

$$\varphi = F^*(x, y, t) \cdot Z(z) \quad (32)$$

hvor

$$F^*(x, y, t) = F_1(x, y) \sin \omega t + F_2(x, y) \cos(\omega t) \quad (33)$$

i Laplaces ligning, findes:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial F^*}{\partial x} \cdot Z + F^* \frac{\partial Z}{\partial x}$$

hvor

$$F^* \frac{\partial Z}{\partial x} = F^* \left(\frac{\partial Z}{\partial h} + \frac{\partial Z}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial h} \right) \frac{\partial h}{\partial x}$$

Det bemærkes, at $\partial Z / \partial x = 0$, når vanddybden er konstant.

Differentieres en gang til, findes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} \cdot Z + \frac{\partial F^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial F^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + F^* \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} \cdot Z + 2 \frac{\partial F^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + F^* \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} \cdot Z + f_1(x, y, z) \end{aligned}$$

hvor

$$f_1(x, y, z) = 2 \frac{\partial F^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + F^* \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

Idet $Z = Z(h(x, y), k(x, y), z)$ må det gælde, at $f_1 = f_1(x, y, z)$, og det ses endvidere, at $f_1(x, y, z) = 0$, når vanddybden er konstant.

Tilsvarende findes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} \cdot Z + \frac{\partial F^*}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial F^*}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + F^* \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} \cdot Z + 2 \frac{\partial F^*}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + F^* \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} \cdot Z + f_2(x, y, z) \end{aligned}$$

hvor

$$f_2(x, y, z) = 2 \frac{\partial F^*}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + F^* \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

med $f_2(x, y, z) = 0$, når vanddybden er konstant.

Endelig findes

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = F^* \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = F^* k^2 Z(z)$$

Indsættes disse udtryk i Laplaces ligning gives

$$\left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} \right) Z(z) + k^2 F^* Z(z) + f_3(x, y, z) = 0$$

som efter division med $Z(z)$ kan skrives

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} + k^2 F^* + f_4(x, y, z) = 0 \quad (34)$$

hvor $f_4 = f_3/Z(z) = 0$ for konstant vanddybde.

Med de foretagne antagelser er den eneste ubekendte funktion

$$\begin{aligned} F^* &= F^*(x, y, t) \\ &= F_1(x, y) \sin \omega t + F_2(x, y) \cos \omega t \end{aligned}$$

Benyttes ligning (34) derfor til 2 forskellige tidspunkter fås 2 DL til bestemmelse af funktionerne $F_1(x, y)$ og $F_2(x, y)$.

Først konstateres, at med varierende vanddybde kan $Z(z)$ ikke elimineres af ligningen samt, at ligningen indeholder led, der afhænger af koten z .

Opskrives ligning (34) for i to punkter beliggende i samme vertikal men med forskellige z -værdier (koter), bliver resultatet derfor 2 ligninger med forskellige koefficienter og dermed også forskellige løsninger af $F^*(x, y)$. Antagelsen

$$Z(z) = \frac{\cosh h(z + h)}{\cosh kh}$$

fører således til, at $F^* = F^*(x, y, z)$, omend variationen med z forhåbentlig er svag. Da vi ikke ønsker at operere med en funktion, som afhænger af z , vælger vi en løsning $F^*(x, y)$, som "i gennemsnit" opfylder Laplaces ligning op langs en vertikal. Dette kan gøres ved at etablere en DL, hvor koefficienterne ikke afhænger af koten z , idet man integrerer ligning (34) over dybden, dvs.

$$\int_{-h}^0 \Delta \varphi dz = 0 \quad (35)$$

$$\text{hvor } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

De steder, hvor $\Delta \varphi < 0$, modsvares derfor af de steder, hvor $\Delta \varphi > 0$.

Man kan imidlertid også lægge mere vægt på at opnå $\Delta \varphi \simeq 0$ de steder i vertikalen, hvor de bølgeskabte bevægelser er størst.

Som vægtfaktor $w(z)$ valgte Berkhoff (1972) derfor

$$w(z) = \cosh k(z + h) \quad (36)$$

og fandt så en DL af ligningen

$$\int_{-h}^0 \Delta \varphi \cdot w(z) dz = 0 \quad (37)$$

Den valgte vægtfaktor vægter alle koter ens ved fladvandsbølger, hvor bevægelserne er lige store i hele dybden. For dybtvandsbølger vægtes området nær overfladen mest, hvilket er fornuftigt, da de største bevægelser foregår der.

Integreres ligning (37) og bortkastes små led, findes følgende DL:

$$\bar{\nabla} \cdot (A(x, y) \bar{\nabla} F^*(x, y)) + k^2 A(x, y) F^*(x, y) = 0 \quad (38)$$

hvor

$$\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (39)$$

$$A(x, y) = \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (40)$$

Benyttes dispersionsligningen, ligning (20), kan udtrykket for $A(x, y)$ også skrives som

$$A(x, y) = \frac{1}{2k} \tanh kh \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (41)$$

Benyttes størrelserne fasehastighed c og gruppehastighed c_g fra teorien om bølger med rette fronter, dvs.

$$c = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (42)$$

$$c_g = c \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (43)$$

findes

$$A(x, y) = c c_g \quad (44)$$

$$k^2 A(x, y) = \omega^2 \frac{c}{c_g} \quad (45)$$

Man kan derfor omskrive ligning (38) til

$$\nabla \cdot \left(c c_g \left(\frac{\partial F^*}{\partial x}, \frac{\partial F^*}{\partial y} \right) \right) + \omega^2 \frac{c_g}{c} F^* = 0$$

eller

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(c c_g \frac{\partial F^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c c_g \frac{\partial F^*}{\partial y} \right) + \omega^2 \frac{c_g}{c} F^* = 0} \quad (46)$$

Ligningen kaldes Mild Slope ligningen på elliptisk form, da der er tale om en såkaldt elliptisk DL. Sådanne DL giver ved numerisk løsning meget store lignings-systemer i praksis. Endvidere skal $F^*(x, y, t)$ findes til 2 forskellige tidspunkter inden $F_1(x, y)$ og $F_2(x, y)$ og dermed $F(x, y)$ og $\delta(x, y)$ er bestemt. Den elliptiske version af Mild Slope ligningen er derfor ret besværlig at arbejde med.

Copeland (1985) foreslog derfor at omskrive (46) til en ligning, hvor $\eta = \eta(x, y, t)$ indgår direkte.

Som nævnt tidligere, findes η af ligning (4), der også kan skrives som

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t} \quad (47)$$

Da

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, 0, t) &= Z(0) \cdot F^*(x, y, t) = \frac{\cosh k(0 + h)}{\cosh kh} \cdot F^*(x, y, t) \\ &= 1 \cdot F^*(x, y, t) \end{aligned}$$

kan ligning (47) derfor også skrives som

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial F^*}{\partial t} \quad (48)$$

Differentieres ligning (46) mht. tiden, dvs.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c c_g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^*}{\partial t} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c c_g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F^*}{\partial t} \right) \right) + \omega^2 \frac{c_g}{c} \frac{\partial F^*}{\partial t} = 0$$

og indsættes her ligning (48) findes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c c_g \frac{\partial(-\eta g)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c c_g \frac{\partial(-\eta g)}{\partial y} \right) + \omega^2 \frac{c_g}{c} (-\eta g) = 0$$

som efter division med g giver

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c c_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \omega^2 \frac{c_g}{c} \eta = 0$$

Da η er en harmonisk funktion, gælder følgende relation

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\omega^2 \eta$$

som indsat giver

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(c c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c c_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0} \quad (49)$$

Ligning (49) betegnes Mild Slope Ligningen på hyperbolsk form, og den kan løses direkte i tidsdomænet. Benyttes en såkaldt eksplicit 'finite difference'-metode, kan løsningen ske uden opstilling af store ligningssystemer, og selv store områder kan håndteres på en PC.

Den hyperbolske version af Mild Slope ligningen kan omskrives til et sæt sammenhørende 1. ordens DL, hvis regnestørrelserne Q_x og Q_y indføres.

Som vist senere kan Q_x og Q_y tolkes fysisk i tilfælde af fladvandsbølger.

Som vist nedenfor er følgende tre sammenhørende ligninger ækvivalente med den hyperbolske version af Mild Slope ligningen (49):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{c_g}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t} + c c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t} + c c_g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (52)$$

Først differentieres (50) mht. tiden. Da differentiationsrækkefølgen er vilkårlig findes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Q_y}{\partial t} \right) + \frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (53)$$

Heri indsættes (51) og (52), hvilket giver

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(-c c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-c c_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial x} \left(c c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c c_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

Sidste ligning ses at være identisk med Mild Slope ligningen på hyperbolsk form (49).

Ligningerne (50), (51) og (52) kan tolkes fysisk i tilfælde af fladvandsbølger, hvor $c_g = c$, da $\frac{2kh}{\sinh 2kh} \rightarrow 1$ for $kh \rightarrow 0$.

Herved haves for fladvandsbølger

$$c_g = c = \sqrt{gh} \quad (54)$$

$$\Leftrightarrow c c_g = gh \quad (55)$$

Indsættes dette i ligningerne (50), (51) og (52) findes:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (56)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (57)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (58)$$

Herefter betragtes en cylinderflade fra $z = -h$ til $z = \eta$ med grundareal $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, og kontinuitetsligning samt de 2 bevægelsesligninger opskrives.

Betegner P vandføringen pr. m gennem en flade vinkelret på x -aksen og Q vandføringen pr. m gennem en flade vinkelret på y -aksen, dvs.

$$P = V_x \cdot (h + \eta)$$

$$Q = V_y \cdot (h + \eta)$$

hvor $\bar{V} = (V_x, V_y)$ er middelhastighedsvektoren, findes kontinuitetsligningen umiddelbart til

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (59)$$

Newtons 2. lov for massen inden for cylinderfladen lyder

$$\rho(h + \eta) \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}_{tryk} = -\bar{\nabla} p \cdot (h + \eta) \quad (60)$$

idet der kun er trykkræfter til stede (ideal væske er antaget), og man ved fladvandsbølger kan regne med konstant trykgradient over hele volumenet svarende til hydrostatisk tryk

$$\Leftrightarrow \bar{\nabla} p = \bar{\nabla}(\rho g \eta) = \rho g \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (61)$$

Lineariseres (små bølgeeleverationer) findes

$$h + \eta \simeq h \quad (62)$$

$$\bar{V} \simeq \left(\frac{P}{h}, \frac{Q}{h} \right) \quad (63)$$

$$\text{og} \quad \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \quad (64)$$

idet de konvektive led er ulineære og dermed må anses for små.

Indsættes (61) - (64) i Newtons 2. lov og udskrives de to komponentligninger, findes

$$\begin{aligned}
 x - \text{komp.} & : \rho h \cdot \frac{\partial \left(\frac{P}{h} \right)}{\partial t} = -\rho g h \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 & \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = -g h \frac{\partial \eta}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
 y - \text{komp.} & : \rho g \cdot \frac{\partial \left(\frac{Q}{h} \right)}{\partial t} = -\rho g h \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 & \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = -g h \frac{\partial \eta}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{66}$$

Det ses umiddelbart, at kontinuitetsligningen og disse bevægelsesligninger er identiske med Mild Slope ligningerne (56) - (58), hvis $Q_x = P$ og $Q_y = Q$, dvs. $\bar{Q} = (Q_x, Q_y)$ er vandføringsvektoren i tilfælde af fladvandsbølger.

For fladvandsbølger er ligningerne (50) - (52) og ligningerne (56) - (58) identiske, hvorfor Mild Slope ligningssystemet derfor kan tolkes som bevægelsesligninger i tilfælde af lineære fladvandsbølger. De bølgefelter, der beregnes med Mild Slope ligningerne, er derfor fysisk korrekte fra begyndelsen af beregningen. I praksis er man dog som regel kun interesseret i det "stationære" bølgefelt, dvs. fra det tidspunkt, hvor amplituden i et punkt bliver konstant.

Tilsvarende tolkninger er ikke mulige for større vanddybder, hvor Q_x og Q_y blot bliver regnestørrelser uden fysisk indhold. Endvidere skal man huske på, at eftersom (51) og (52) ikke er de korrekte bevægelsesligninger, vil bølgefelterne i opstartsfasen ikke være fysisk korrekte. Man kan derfor først bruge bølgefeltet, når "stationære" forhold er indtrådt.

1.3 Maksimale bundhældninger

Alle kendte udledninger af Mild Slope ligninger (det drejer sig om 6-7 stykker) i 2 dimensioner har nogle intuitive betragtninger vedrørende størrelsesordenen af de led, der bortkastes. De maksimale bundhældninger der kan tillades, er derfor fundet ved forsøg, og det har vist sig, Booij (1983), at nøjagtige resultater opnås for bundhældninger mindre end 1 : 3.

1.4 Anvendelsesområder

Mild Slope ligningerne kan i praksis forventes at give ret gode resultater, så længe ikke-lineære effekter er ubetydelige. Dette er bl.a. tilfældet ved mange havneuroproblemer, hvis brydning ikke finder sted. Ligningerne må også forventes at give gode resultater for bølgefelter og kræfter på store konstruktioner med lodret forside.

Uregelmæssige bølger modelleres i begge tilfælde ved superposition af resultaterne fra kørsler med regelmæssige bølger.

2 Litteratur

- Berkhoff, J.W.C. : *Computation of Combined Refraction-Diffraction*. Proceedings, 13th Coastal Engineering Conference, Chapter 24, pp 471-490, Vancouver, July 1972.
- Booij, N. : *A note on the accuracy of the Mild-Slope equation*. Coastal Engineering, pp 191-203, vol. 7, 1983.
- Jonsson, I.G. and Brink-Kjær, C. : *A comparison between two reduced wave equations for gradually varying depth*. Progress Report 31, pp 13-18, 1973, ISVA, DTH.
- Copeland, G.J.M. : *A practical alternative to the Mild-Slope wave equation*. Coastal Engineering, pp 125-149, vol. 9, 1985.
- Madsen, P.A. and Larsen, J. : *An efficient finite difference approach to the Mild-Slope equation*. Coastal Engineering, pp 329-351, vol. 11, 1987.